



TITLE:

可約線型代数群の有限個の軌道分解をもつ表現の分類(代数群とその周辺)

AUTHOR(S):

木村, 達雄

CITATION:

木村, 達雄. 可約線型代数群の有限個の軌道分解をもつ表現の分類(代数群とその周辺). 数理解析研究所講究録 1984, 512: 48-57

ISSUE DATE:

1984-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98341>

RIGHT:

可約線型代数群の有限個の軌道分解をもつ表現の分類

筑波大 数学系 木村 達雄

問題 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ を \mathbb{C} 上の可約 (reductive) 線型代数群 G の有限次元有理表現とする。 V は G -軌道の disjoint union に分解する: $V = \bigsqcup_x \rho(G)x$, $\rho(G)x = \{\rho(g)x; g \in G\}$.

これが, 有限個になるような (G, ρ, V) の組をすべて求めよ。

考察 群 G が可約ゆえ V は既約表現の直和に分解する。
 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$, このとき, $G = GL(1)^s \times [G, G]$ ($s \leq \ell$)
 で, $GL(1)^s$ は V_1, \dots, V_ℓ のスカラー倍として適当に作用する, としてよい。このとき, 有限個の軌道をもてば, 群を大きくしてもそうだから, 以下 $G = GL(1)^\ell \times [G, G]$, 但し $GL(1)^\ell$ は各 V_i に独立にスカラー倍として作用する, という場合を考えよう。実際には, スカラー倍が独立でなくても有限個であり得るが, 少なくとも, $\rho: G \rightarrow GL(V)$ が有限個の軌道をもつような $[G, G]$ と $\rho|_{[G, G]}$ は完全に決定できることになる。

以下, 断わらなくても常に各既約成分にスカラー倍が独立に作用しているとする。

$(G \times G', \rho \otimes \rho', V \otimes V')$ を単に $\underset{\circ}{G} \rho \xrightarrow{\rho'} \underset{\circ}{G}'$ と表わす。

特に $G = GL(n), SL(n)$ のときは, 単に $\underset{\circ}{n} \rho \xrightarrow{\rho'} \underset{\circ}{G}'$ と書く。

更に ρ が standard な表現 $\lambda_1 (= \square : \text{Young 図形で, 即ち } GL(n) \text{ の } \mathbb{C}^n \text{ への行列としての作用})$ のとき, $\underset{\circ}{n} \rho \xrightarrow{\rho'} \underset{\circ}{G}'$ と書く。

さて, $\rho = \text{既約の場合}$ と $[G, G] = \text{単純群の場合}$ には既に分類が完成している。これらの結果と, 次の定理が一般の場合の分類を可能にするのである。

基本定理 1. $\underset{\circ}{H} \rho \xrightarrow{m} \underset{\circ}{m}$ が有限軌道に分解し $\underset{\circ}{1} \rho \xrightarrow{H} \underset{\circ}{1}$ が, 無限個の軌道をもつとする。もし $\underset{\circ}{H} \rho \xrightarrow{m} \underset{\circ}{\tau} \xrightarrow{\sigma} \underset{\circ}{G}$ が有限個の軌道をもつならば, (τ は既約で,) 以下のいずれかである。

(1) $\underset{\circ}{H} \rho \xrightarrow{m} \underset{\circ}{m} \xrightarrow{\dots} \underset{\circ}{m}$

(2) $\underset{\circ}{H} \rho \xrightarrow{m} \underset{\circ}{m} \xrightarrow{\dots} \underset{\circ}{Sp(n)}$

(3) $\underset{\circ}{H} \rho \xrightarrow{m} \underset{\circ}{m} \xrightarrow{\dots} \underset{\circ}{n} \boxtimes \underset{\circ}{1}$

(4) $\underset{\circ}{H} \rho \xrightarrow{m} \underset{\circ}{m} \xrightarrow{\dots} \underset{\circ}{2} \xrightarrow{Sp(n)} \underset{\circ}{1}$

(但し $\underset{\circ}{m} \xrightarrow{\dots} \underset{\circ}{m}$ は $\underset{\circ}{n_1} \xrightarrow{\dots} \underset{\circ}{n_2} \xrightarrow{\dots} \underset{\circ}{n_k}$, $\forall n_j$ の略記号)

特に $m = 2$ で, $\underset{\circ}{H} \rho \xrightarrow{2} \underset{\circ}{1}$ が有限軌道分解をもつならば

(1)~(4) は実際, 有限個の軌道に分解する。

今, (G, ρ, V) が $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_l$, $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_l$ と既約表現に分解するとき, (G, ρ_i, V_i) ($i = 1, \dots, l$) を (G, ρ, V) の

既約成分という事にする。以下有限個の軌道に分解する空間を F.P. (Finite Prehomogeneous Vector Space の略, 有限個の軌道に分解すれば, 概均質ベクトル空間であるから, こういう) と言うことにする。この基本定理により, 既約成分が $(GL(n) \times GL(m), \square \otimes \square, V(n) \otimes V(m))$, $(Sp(n) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \square, V(2n) \otimes V(m))$, $(GL(n), \square, V(\frac{1}{2}n(n-1)))$ 以外の既約 F.P. を含むような F.P. は本質的に定まって (制限されて) しまうのである。

定理 2. (V.G.Kac, T.Kimura) 既約 F.P. は以下の通り.

$$(I) \quad (SL(n) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(n) \otimes V(m))$$

$$(Sp(n) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(2n) \otimes V(m))$$

$$(GL(n), \Lambda_2, V(\frac{1}{2}n(n-1)))$$

$$(II) \quad (GL(2), 3\Lambda_1, V(4)), (GL(8), \Lambda_3, V(56))$$

$$(GL(1) \times E_6, \Lambda_1, V(27)), (GL(1) \times E_7, \Lambda_6, V(56))$$

$$(GL(1) \times G_2, \Lambda_2, V(7))$$

$$(GL(1) \times SO(n), \Lambda_1, V(n)) \quad (n=9, 11, \text{ or } n \geq 13)$$

$$(GL(1) \times Spin(n), (\frac{n}{2}) \text{ スピン表現 }) \quad (n=9, 11, 14)$$

$$(SL(3) \times GL(2), 2\Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(6) \otimes V(2))$$

$$(E_6 \times GL(2), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(27) \otimes V(2))$$

$$(SL(5) \times GL(4), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, V(10) \otimes V(4))$$

$$(III) \quad (GL(1) \times Sp(2), \Lambda_2, V(5)) \cong (GL(1) \times SO(5), \Lambda_1, V(5))$$

$$(GLU) \times Sp(3), \Lambda_3, V(14))$$

$$(GL(1) \times SO(n), \Lambda_1, V(n)) \quad (n = 7, 10, 12)$$

$$(GLU) \times Spin(12), \text{半スピノ表現}, V(64))$$

$$(IV) \quad (GL(n), 2\Lambda_1, V(\frac{1}{2}n(n+1)))$$

$$(SO(n) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(n) \otimes V(m)) \quad (n=9 \text{ or } n \geq 11, m \geq 2)$$

$$(G_2 \times GL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, V(7) \otimes V(2))$$

$$(Spin(7) \times GL(2), \text{スピノ表現} \otimes \Lambda_1, V(8) \otimes V(2))$$

$$(Spin(10) \times GL(2), \text{半スピノ表現} \otimes \Lambda_1, V(16) \otimes V(2))$$

$$(SL(5) \times GL(3), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, V(10) \otimes V(3))$$

$$(Spin(10) \times GL(3), \text{半スピノ表現} \otimes \Lambda_1, V(16) \otimes V(3))$$

$$(SL(n) \times SL(3) \times GL(2), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(n) \otimes V(3) \otimes V(2)) \\ (n \geq 3)$$

$$(V) \quad (SL(6) \times GL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, V(15) \otimes V(2))$$

$$(SL(7) \times GL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, V(21) \otimes V(2))$$

$$(GL(6), \Lambda_3, V(20)), (GL(7), \Lambda_3, V(35))$$

$$(Sp(n) \times GL(2), \Lambda_1 \otimes 2\Lambda_1, V(2n) \otimes V(3))$$

$$(SO(3) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(3) \otimes V(m)) \quad (m \geq 2)$$

$$(GL(1) \times Spin(10), \text{半スピノ表現}, V(16))$$

$$(SO(10) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(10) \otimes V(m)) \quad (m \geq 2)$$

$$(GL(1) \times Spin(7), \text{スピノ表現}, V(8))$$

$$(SO(7) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(7) \otimes V(m)) \quad (m \geq 2)$$

$$(SO(5) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(5) \otimes V(m)) \quad (m \geq 2)$$

$$(GL(1) \times SO(8), \Lambda_1, V(8)) (\cong (GL(1) \times Spin(8), \text{半スピノ表現}, V(8)))$$

$$(SO(8) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(8) \otimes V(m)) \quad (m \geq 2)$$

$$(SL(5) \times GL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, V(10) \otimes V(2))$$

$$(SO(6) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(6) \otimes V(m)) \quad (m \geq 2)$$

$$(SL(2) \times SL(2) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(2) \otimes V(2) \otimes V(m))$$

$$(\cong (SO(4) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(4) \otimes V(m))) \quad (m \geq 2)$$

$$(Spin(7) \times GL(3), \text{スピノ表現} \otimes \Lambda_1, V(8) \otimes V(3))$$

定理 3 (T. Kimura) スカラー倍との合成で F.P. になる単純代数群の表現は、以下に限る。(但し既約でない場合)

$$SL(n); \quad \square + \square, \square + \square + \square, \quad \square\square + \square, \\ \quad \quad \quad \square + \square, \square + \square + \square, \\ \quad \quad \quad \square + \square \text{ (但し } n=6,7), \text{ 及びその dual たち.}$$

$$Sp(n); \quad \square + \square, \square + \square + \square \\ \quad \quad \quad \square + \square \text{ (} n=2), \square + \square \text{ (} n=3)$$

$$Spin(7); \quad \text{スピノ表現} + \text{ベクトル表現}$$

$$Spin(n); \quad \text{半スピノ表現} + \text{ベクトル表現} \\ (n=8,10,12)$$

$$(\square = \Lambda_1, \square\square = \Lambda_2, \square\square\square = \Lambda_3, \square\square\square\square = 2\Lambda_1)$$

有限軌道をもつ(即ち F.P.) 空間に関する一般的な結果を
列挙しよう.

Prop. 1. $\rho: H \rightarrow GL(V)$ を任意の群 H の有限次元表現とする。
 $(H \times GL(n), \rho \otimes 1, V \otimes V(n))$ が F.P. ならば, $1 \leq k \leq n$
に対し, $(H \times GL(k), \rho \otimes 1, V \otimes V(k))$ も F.P.

Prop. 2. 代数群 G の連結成分を G_0 とする。そのとき,
 (G, ρ, V) F.P. $\iff (G_0, \rho|_{G_0}, V)$ F.P.

Prop. 3. $\rho: H \rightarrow GL(V)$ の dual 表現を $\rho^*: H \rightarrow GL(V^*)$
とすると, (H, ρ, V) F.P. $\iff (H, \rho^*, V^*)$ F.P.

しかも, orbits はこのとき 1 対 1 に対応する。

特に $(G, \rho_1^{(*)} \oplus \dots \oplus \rho_\ell^{(*)}, V_1^{(*)} \oplus \dots \oplus V_\ell^{(*)})$ F.P. 但し $\rho_i^{(*)} = \rho_i$ 又は ρ_i^*
 $\iff (G, \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_\ell, V_1 \oplus \dots \oplus V_\ell)$ F.P.

Prop. 4. (G_1, ρ_1, V_1) と (G_2, ρ_2, V_2) の直和を
 $(G_1, \rho_1, V_1) \oplus (G_2, \rho_2, V_2) = (G_1 \times G_2, \rho_1 \oplus 1 + 1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ で定義する。
このとき, $\left. \begin{array}{l} (G_1, \rho_1, V_1) \text{ F.P.} \\ (G_2, \rho_2, V_2) \text{ F.P.} \end{array} \right\} \iff (G_1, \rho_1, V_1) \oplus (G_2, \rho_2, V_2) \text{ F.P.}$

Prop. 5. 群 G が reductive とする。自然数 m に対し,
 $m_1 = \ell$ ($m = 2\ell$, または $m = 2\ell + 1$ のとき) とする。

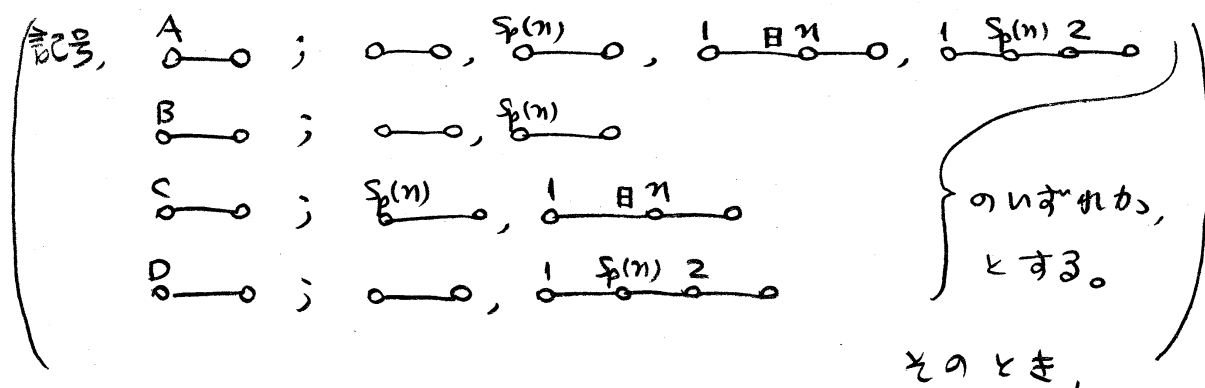
$(G \times GL(m_1), \sigma \otimes 1 + \rho \otimes 1, V + V(m) \otimes V(m_1))$ F.P.
 $\Rightarrow (G \times GL(n), \sigma \otimes 1 + \rho \otimes 1, V + V(m) \otimes V(n))$ F.P.
for all $n \geq 1$.

以上で材料はそろった。あとは、これ等を使、てやるだけであるが、Prop. 4 により *indecomposable* なものだけを考えればよい事がわかる。

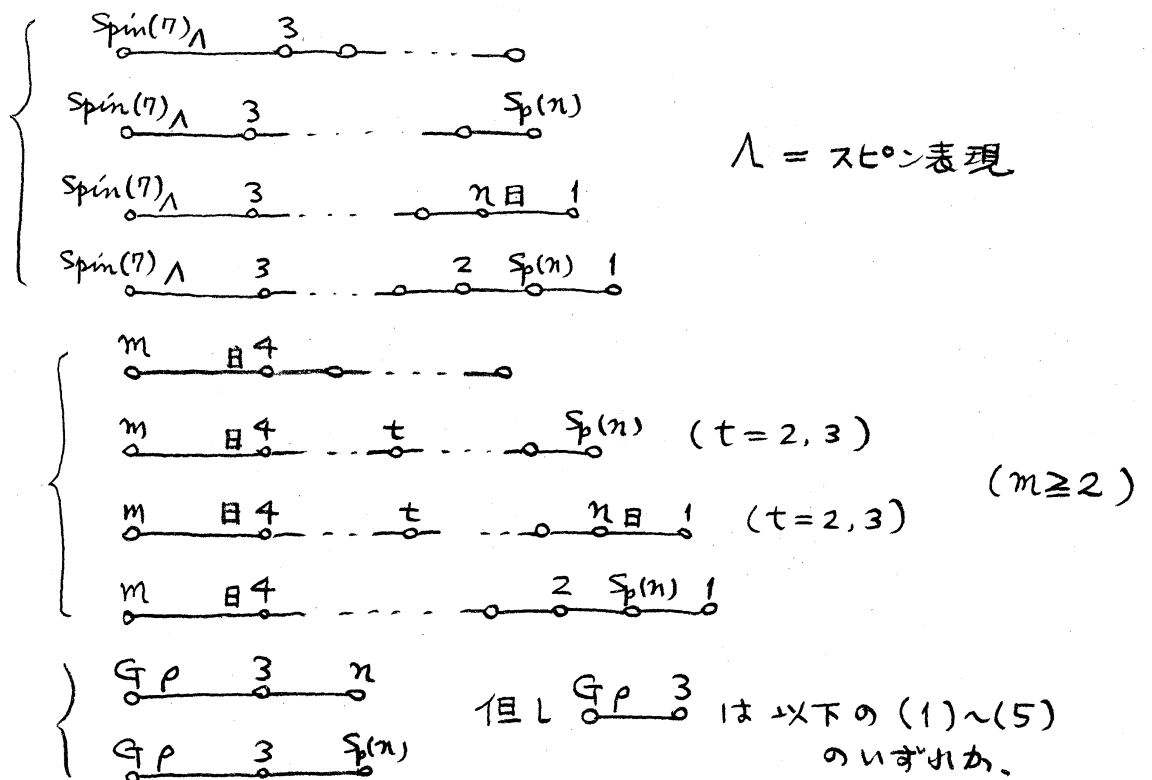
例えば、 G を単純群として、 $(GL(1) \times G, \rho, V)$ を既約成分にもつ *non-irreducible indecomposable* F.P. が存在したとすれば、それは $(GL(1)^2 \times G \times H, \rho \oplus 1 + \rho' \otimes \sigma, V + V' \otimes W)$ の形を含む。 *indecomposable* ゆえ $\rho' \neq 1$ 。今 $n = \dim W \in \deg \sigma$ とおけば、群を大きくしても F.P. ゆえ、 $(GL(1) \times G \times GL(n), \rho \oplus 1 + \rho' \otimes \sigma, V + V' \otimes V(n))$ ($W = V(n)$) も F.P. 従って、Prop 1. により $n \rightarrow 1$ とし、 $(GL(1)^2 \times G, \rho \oplus \rho', V \oplus V')$ ($\rho, \rho' \neq 1$) F.P. となる。このようなものは、定理 3 でわかっている。従って、この事より、定理 2 の (II) にある単純既約 F.P. を既約成分にもつ *non-irred. indecomp. F.P.* は存在しないことが、わかる。

このような具合に分類を進めていくのである。

以下に結果を記そう。定理 2 と定理 3 に出てくる F.P. 以外の *indecomposable* F.P. は、次のものに限る。



- (4) $(SL(m) \times SL(2), \square \otimes \square, V(m) \otimes V(3))$
- (5) $(SL(n) \times SL(2), \square \otimes 1 + \square \otimes \square) (n=6, 7)$
- (6) $(Spin(8) \times SL(2), \wedge \otimes 1 + \wedge' \otimes \square) (\wedge, \wedge' \text{ はベクトル表現, 偶及び奇の半スピノール表現 3つのうち相異なる 2つ})$
- (7) $(SL(n) \times SL(2), \square \otimes 1 + \square \otimes \square) (n=4, 5)$
- (8) $(SL(2) \times SL(5) \times SL(2), \square \otimes \square \otimes 1 + 1 \otimes \square \otimes \square)$
- (9) $(SL(m) \times SL(m') \times SL(2) \times SL(2), \square \otimes \square \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \square \otimes \square \otimes \square)$
 $(m' \geq 3)$
- (10) $(Sp(m) \times SL(3) \times SL(2) \times SL(2), \square \otimes \square \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \square \otimes \square \otimes \square)$



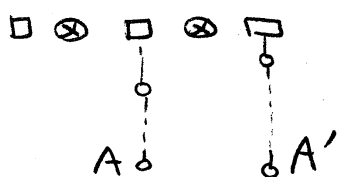
- (1) $(Spin(10) \times SL(3), \text{半スピノール表現} \otimes \square, V(16) \otimes V(3))$
- (2) $(SL(5) \times SL(3), \square \otimes \square, V(10) \otimes V(3))$

$$(3) (SL(m) \times SL(2) \times SL(3), \square \otimes \square \otimes \square) \quad (m \geq 3)$$

$$(4) (Spin(8) \times SL(3), \Lambda \otimes 1 + \Lambda' \otimes \square) \quad (\Lambda, \Lambda' \text{ はベクトル表現, 偶及び奇の半スピノール表現 3つのうち相異なる 2つ})$$

$$(5) (SL(4) \times SL(3), \square \otimes 1 + \square \otimes \square, V(4) + V(6) \otimes V(3))$$

$$SL(m) \times SL(2) \times SL(2) \quad (m \geq 2)$$



$$\begin{array}{c} 1 \quad \square \quad m \\ \hline \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} 1 \quad \square \quad m \quad t \\ \hline \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \quad S_p(n) \quad (t=2,3)$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad \square \quad 3 \\ \hline \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \quad S_p(n) \quad , \quad \begin{array}{c} 1 \quad \square \quad m \quad t \quad n \quad \square \quad 1 \\ \hline \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \quad (t=2,3)$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad \square \quad 3 \quad n \quad \square \quad 1 \\ \hline \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} 1 \quad \square \quad m \quad 2 \quad S_p(n) \quad 1 \\ \hline \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array}$$

$$SO(m) \quad \hline \circ \quad \circ \quad \circ$$

$$SO(m) \quad \hline \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad S_p(n) \quad (m \geq 4; t=2,3)$$

$$SO(3) \quad \hline \circ \quad \circ \quad \circ \quad S_p(n)$$

$$SO(m) \quad \hline \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad n \quad \square \quad 1 \quad (m \geq 4; t=2,3)$$

$$SO(3) \quad \hline \circ \quad \circ \quad \circ \quad n \quad \square \quad 1$$

$$SO(m) \quad \hline \circ \quad \circ \quad \circ \quad 2 \quad S_p(n) \quad 1$$

参考文献

[1] T. Kimura, S. Kasai and O. Yasukura, A Classification of the Representation of Reductive Algebraic Groups which Admit Only a Finite Number of Orbits, Preprint